Központi felvételi rendszerek: Taktikázás és stabilitás

Kóczy Á. László*

Kivonat

Egy központi felvételi rendszer feladata a jelentkezők és az iskolák, vagy szakok párosítása. Ez a párosítás többféleképpen is történhet, azonban a gyakran igen különböző felvételi rendszerek is leírhatók néhány alapelv mentén. Ilyen alapelvként fogalmazható meg, hogy egy párosítás legyen stabil, Pareto optimális, vagy hogy mentes legyen a taktikázástol. Ismertetünk pár ismert jó és kevésbé jó párosító algoritmust, áttekintjük alapvető tulajdonságaikat, illetve kitérünk olyan jellemzőkre, melyek meghatározhatják egy felvételi rendszer elfogadottságát. A magyarországi felvételi rendszereket egy külön dolgozatban vizsgáljuk.

Kulcsszavak: stabil párosítások; Gale-Shapley algoritmus; stratégiai viselkedés; bostoni mechanizmus

1. Bevezetés

A legtöbb országban léteznek központi felvételi rendszerek a felső-, közép-, sőt általános iskolai beiskolázásra, vagy például a medikusok rezidensi elhelyezésére. A mechanizmusok gyakran fekete dobozként működnek, nagyobb baj, hogy közülük sok rendelkezik két előnytelen tulajdonság valamelyikével: Az első a jogos irigység: a hallgatót felvették volna egy preferált iskolába, de nem oda került. A másik, hogy rosszul járhat az, aki a valódi preferenciáit adja meg, ügyesen kell taktikázni ahhoz, hogy a legjobb iskolába kerüljünk. Ez nem kis frusztrációt okoz mind a szülőknek, mind a jelentkezőknek.

Gale and Shapley (1962) cikke egy teljesen új terület alapjait fektette le. Bevezetett egy matematikai modellt, melynek segítségével kiértékelhetjük a felvételi rendszereket; a modell segítségével formalizálhatjuk a fent megfogalmazott tulajdonságokat, majd matematikailag igazolható ezen tulajdonságok megléte, vagy éppen hiánya. Az elmélet azt is igazolja, hogy tökéletes

*Budapesti Műszaki Főiskola, Keleti Károly Gazdasági Kar, 1084 Budapest, Tavaszmező 15-17. Email: koczy.laszlo@kgk.bmf.hu

felvételi algoritmus nincs, azonban bizonyos speciális esetekben, melyek a gyakorlati élet jó részét lefedik, léteznek olyan javaslatok, melyek az ideálishoz nagyon hasonló eredményt produkálnak.

Felvételi rendszerben a párosítások elméletét elsőként az Egyesült államokban alkalmazták a medikusok rezidens képzésénél. A National Intern Matching Program (NIMP) több tízezer medikus elhelyezéséről gondoskodik. 1951-ben került bevezetésre[1], amikor a decentralizált piac válságba került: egyebek mellett rendszeres volt a szerződések megszegése egy vonzóbb ajánlat esetén és a különböző reformkísérletek csak újabb problémákat szültek. A hatás azonnali volt. A részvétel önkéntes, s ennek tükrében nagy jelentőségű, hogy a kezdetektől a hallgatók/intézmények bő 95%-a részt vett a párosításban. Mára ez az arány 85%-ra mérséklődött elsősorban az orvos-házaspárok miatt, akik a rendszeren kívül kerestek mindkettőjük számára megfelelő megoldást. Minek köszönhető az algoritmus sikere? A stabilitásnak és az őszinteségnek (bár mint látni fogjuk az utóbbi csak korlátozottan érvényesül).

Stabilitás. A decentralizált piac problémája, hogy a jelentkezők az ajánlatokat időben elszórva, de szoros határidőkkel kapják. Egy későn érkező jó ajánlat a megállapodás felrúgásához, vagy a jogos irígységhez (Abdulkadiroğlu and Sönmez, 2003) vezethet: „mi lett volna, ha...?”

Fontos hangsúlyozni, hogy a jogos irigység nem a decentralizált rendszer hibája, előfordulhat központi felvételi rendszerek esetén is. Itt is létezhet olyan intézmény és hallgató, akik az eredményt látva a különmegállapodás mellett döntenek, tulajdonképpen ismét felrúgva a centralizált rendszer szabályait.

Őszinteség. Mielőtt egy hallgató benyújtja a jelentkezési lapját, rangsorolja a célintézményeket. Célszerű-e ebben a sorrendben megnevezni az intézményeket, vagy létezik ennél jobb taktika is. Általában az őszinteség nem kifizetődő.

Ez több problémát is felvet. Hova érdemes jelentkezni, hogy a hallgató a lehető legjobb kórházban/iskolában kapjon helyet? Helyes-e, ha az érdemek helyett a taktika a meghatározó? Hogy bonyolódik mindez, ha a hallgató nem ismeri a többiek érdemeit/preferenciáit, sőt esetleg

[1] A történelmi áttekintést lásd Roth (1984) dolgozatában.

a saját érdemei (például az érettségi eredménye) sem ismertek?

Miután ismertettük a párosítások irodalmának hátterét és motivációját, rátérünk a matematika modellek ismertetésére. Rögtön leszögezzük, hogy a matematika csak eszköz lesz, az eredemények nagyonis gyakorlatiak, világos, gyakran igen egyszerű válaszokat adnak világos kérdésekre. Mivel azonban a jelölés helyenként meglehetősen absztrakt az avatatlan olvasó számára, ezért az általánosabb modell helyett egy egyszerűbb bevezetésével és tárgyalásával kezdjük. Mint majd látni fogjuk, az egyszerű modell eredményei szinte kivétel nélkül általánosíthatók.

2. A házassági modell

Most már iskolákról és felvételizőkről beszélve az egyszerűsítés annyi, hogy feltételezzük, hogy minden iskola pontosan 1 hallgatót vehet fel. A nyilvánvaló párhuzam miatt ezt házassági modellnek nevezzük, ahol a férfiak a hallgatók, a nők az iskolák, vagy fordítva. Egy házaspár pontosan egy férfiból és egy nőből áll. Feltételezzük még, hogy egy férfi és egy nő pontosan akkor házasodik össze, ha ezt mindkét fél akarja. Konkrétan minden férfi, illetve nő maradhat nőtlen, illetve hajadon, ha valamilyen oknál fogva nem találnak elfogadható házastársat, vagy a szóbajövő jelöltek már mind elkeltek. Nem zárjuk a válás lehetőségét a modellből, ugyanakkor stabil párosítások esetén válásra nincs szükség.

2.1. A matematikai modell alapjai

A párosítás résztvevői egyértelműen két csoportra oszthatók: A férfiak és nők diszjunkt, azaz átfedés nélküli halmazát (csoportját) M illetve W jelöli, míg egy egyedet m, illetve w, számukat pedig rendre n, illetve p, tehát $M = \{m_1, m_2, ..., m_n\}$, illetve, $W = \{w_1, w_2, ..., w_p\}$.

Feltételezzük azt is, hogy minden egyed rangsorolja az ellenkező nem képviselőit: ha az m férfi a w_1 nőt preferálja a w_2 nővel szemben, az azt jelenti, hogy a $\{w_1, w_2\}$ halmazból választva w_1-t választaná, továbbá, hogy a halmazt bármilyen elemekkel bővítve w_2-t sosem választja. Ezt a preferencia relációt $w_1 >_m w_2$ alakban is felírhatjuk.

Megengedjük azt is, hogy valaki nőtlen, vagy hajadon, ma divatos szóval szingli maradjon. Ennek kifejezésére egy m férfi $P(m)$ preferenciáit a $W \cup \{m\}$ halmazon fogjuk értelmezni, azaz formailag, aki a szingli saját magával lép frigyre. Feltételezzük, hogy a relációk teljesen rendezettek, másrészt a preferencia-reláció tranzitív, azaz ha $w_1 >_m w_2$ és $w_2 >_m w_3$ akkor $w_1 >_m w_3$. Az ilyen preferenciákat és gazdáikat racionálisnak nevezzük. A továbbiakban racionális preferenciákkal dolgozunk. Ezek felírhatók egyszerű felsorolással, például:

$$P(m) = w_1, w_2, m, w_3, ..., w_p, \text{ avagy tömörebben } P(m) = w_1, w_2,$$

hiszen azok a hölgyek, akik körében szívesebben választja m úr a nőtlenséget a további érvelést nem fogják befolyásolni.

Folytatva a jelölések bevezetését. Ha a fenti jelölést használjuk az egyes férfiak és hasonlóan a nők számára, akkor jelölje P a párosítás összes résztvevőjének a preferenciáit. Így

$$P = \{P(m_1), P(m_2), ..., P(m_n), P(w_1), P(w_2), ..., P(w_p)\}.$$

A társkereső piacot az (M, W, P) hármassal jelöljük.

A társkereső piac eredménye a házasságok valamely halmaza, ahol továbbra is megengedjük a szingliket. Matematikailag:

2.1. Definíció (Párosítás). *Párosításnak a $M \cup W$ olyan μ önmagára való leképezését értjük, melyre $\mu(\mu(x)) = x$, és $\mu(m) = m$, vagy $\mu(m) \in W$, illetve $\mu(w) = w$, vagy $\mu(w) \in M$. $\mu(x)$ az x házastársát, vagy egyszerűen párját jelöli.*

Egy párosítást felírhatunk a párok halmazaként, például a

$$\mu = \begin{array}{ccc} w_1 & w_2 & (m_3) \\ m_2 & m_1 & m_3 \end{array}$$

párosításban m_1 házastársa w_2, m_2 házastársa w_1, m_3 pedig nőtlen. Beszélhetünk párosítások közötti preferenciákról is: pontosan akkor $\mu >_x \nu$ ha $\mu(x) >_x \nu(x)$, tehát nincs irigység, vagy más externáliák.

2.2. Stabilitás

Miután bevezettük a jelölést és az alapfogalmakat rátérünk az első fő kérdésre: a stabilitásra.

2.2.1. Egyéni racionalitás

A párosítás egyik alapfeltételezése az volt, hogy mindenki maradhat szingli. Tegyük fel, hogy a μ párosítás m-t w-vel házasítja és hogy $m >_m w$, azaz ha m a w-vel való házasság és a nőtlenség közül az utóbbit választja. Vegyük észre, hogy ahhoz, hogy m nőtlen maradjon, nincs szüksége senkinek a beleegyezésére. Azt is tudjuk, hogy a házasság a felek kölcsönös beleegyezése alapján jöhet csak létre. A fentiek alapján aligha remélhetjük, hogy m beleegyezik a w-vel való házasságba, hiszen azzal, ha nemet mond, automatikusan egy másik párosítás jön létre, ahol ő nőtlen marad, amit ő preferál. Tehát m blokkolja a μ párosítást.

Mivel az ilyen típusú blokknak nincsen semmilyen akadálya, kizárólag olyan párosításokkal érdemes foglalkozni, melyek mentesek az ilyen típusú blokkoktól. A tulajdonságot a kooperatív játékelméletből ismert hasonló koncepció után egyéni racionalitásnak nevezzük.

2.2. Definíció (Egyéni racionalitás). *Egy párosítás egyénileg racionális ha minden egyén elfogadható a párja számára, azaz ha egyik egyed sem blokkolja.*

Bár az egyéni racionalitás jogos elvárás, azonban rögtön felmerül a kérdés, hogy létezik-e egyáltalán olyan párosítás, ami teljesíti ezt a feltételt. Fontos, hogy olyan párosító mechanizmust keresünk, amely minden társkereső piacra működik.

Jelen esetben a válasz pozitív, hiszen az a párosítás, mely minden egyedet önmagával párosít, definícióból adódóan egyénenként racionális. Nos, ez a párosítás, – ha egyáltalán nevezhető annak – aligha az, amit kerestünk. Természetesen sok más egyénileg racionális párosítás is létezik, illetve létezhet. A továbbiakban egy hasonló, ám már a párokra vonatkozó stabilitási tulajdonságot fogunk vizsgálni.

2.2.2. Stabil párosítások

Ha valamely μ párosítás során létezik egy olyan m férfi, és w nő, hogy $w >_m \mu(m)$ és $m >_w \mu(w)$, azaz m és w szívesebben házasodnának egymással, mint kijelölt partnereikkel, aligha kényszeríthetjük őket a társkereső által javasolt házasságokra. Fontos hangsúlyozni, hogy egy ilyen típusú blokk sokkal bonyolultabb, hiszen itt az egyoldalú szakítás önmagában értelmetlen, kell hozzá a kiszemelt partner hasonló lépése is. Ha azonban megengedjük a felek között a kommunikációt, feltételezhetjük, hogy azok a párosítások, ahol ilyen blokkok előfordulhatnak, nem hosszú életűek.

2.3. Definíció (Stabil párosítás). *Egy párosítást akkor nevezünk* stabilnak*, ha sem egyének sem párok nem blokkolják.*

Ha egy házasságközvetítő stabil párosítást javasol ügyfeleinek, akkor hiába elégedetlen az egyik érintett, a „jobb” partnerek nem fognak vele szóba állni. Fontos hangsúlyozni, hogy ha az érintettek kötelesek elfogadni a javaslatot, akkor a párosítás stabilitásának nincs igazán jelentősége (legfeljebb bánhatják, hogy nem máshogy alakult), viszont ha nem, akkor csak stabil párosításokat érdemes javasolni.

Tehát csak és kizárólag stabil párosításokkal érdemes foglalkozni. Létezik-e ilyen párosítás?

A késleltetett elfogadási algoritmus. A kérdés megválaszolásához mi sem egyszerűbb, mint mutatni egy stabil párosítást. Természetesen a kérdés tetszőleges számú férfi és nő, illetve tetszőleges preferenciaprofil (összegezve: tetszőleges (M, W, P)) esetén felmerül, tehát a konkrét megoldás helyett a megoldásra vezető algoritmust fogjuk leírni.

2.4. Tétel. *(Gale and Shapley, 1962) Minden társkereső piacnak van stabil párosítása.*

Bizonyítás. A stabil párosítás az alábbi algoritmussal határozható meg:

1. Ha egy férfi számára nincs elfogadható nő szingli marad. A továbbiakban ezektől a férfiaktól eltekintünk.

2. Minden más férfi megkéri a számára legszimpatikusabb *elérhető* hölgy kezét. Egy hölgy elérhető, ha még nem adott kosarat.
3. A nők kérőik közül a preferálttal eljegyzik egymást.
4. Az elfogadható hölggyel nem rendelkező férfiak szinglik maradnak. Ők a továbbiakban nem vesznek részt.
5. Az eljegyzetlen férfiak (akár a 2. lépésben) megkérik a legszimpatikusabb elérhető hölgy kezét.
6. A nők kérőik és az esetleges jegyesük közül a preferálttal eljegyzik egymást (felbontva az esetleges korábbi eljegyzést).
7. Ha van olyan férfi, akit szíve választottja kikosarazott, visszatérünk a 4. lépéshez.
8. Egyébként az algoritmus véget ér. Ekkor minden férfi vagy szingli, hiszen minden elfogadható hölgy kikosarazta, vagy el van jegyezve a legutóbbi menyasszonyával.

Az algoritmus végén a jegyesek összeházasodnak és boldogan élnek amíg meg nem halnak; azok a nők, akik nem kaptak (elfogadható) házassági ajánlatot, illetve azok a férfiak, akik „kifogytak” az elfogadható hölgyismerősökből, szingliként élik le életüket.

Vegyük észre, hogy az algoritmus során egy férfi ugyanannak a nőnek csak egyszer kérheti meg a kezét. Ha ugyanis egyszer már elutasításra kerül, az algoritmus definíciója miatt annál a hölgynél többet nem próbálkozik. (Ez érthető, hiszen a preferenciák tranzitivitása miatt aligha remélheti, hogy egy újabb próbálkozással szerencsésebb lesz). Mivel minden körben legalább egy férfi megkéri valamely nő kezét, és mivel a lehetséges lánykérések száma véges, ezért ennél nem is lehet több lánykérés az algoritmus futása alatt, tehát az algoritmus *véget ér*.

A stabilitás bizonyításához tegyük fel, hogy valamely m férfi szívesebben házasodna w-vel, mint az algoritmus által meghatározott $\mu(m)$-mel, azaz $w >_m \mu(m)$. Ekkor w elfogadható m számára és m az algoritmus során megkérte w kezét. Az tehát, hogy nem házasodtak össze csak úgy lehetséges, hogy w talált egy másik m' férfit, melyre $m' >_w m$. Ez a férfi vagy w későbbi házastársa, tehát $m' = \mu(w)$, vagy szintén elutasításra került, és így (a tranzitivitást felhasználva) $\mu(w) >_w m'$. Mindkét esetben igaz tehát, hogy $\mu(w) >_w m$, azaz m és w nem blokkolják a párosítást. Végül, mivel a férfiak csak elfogadható nők kezét kérik meg, a nők pedig az elfogadhatatlan férfiakat kikosarazzák az egyéni racionalitás is teljesül. $\square$

A fenti procedúrát *késleltetett elfogadási algoritmusnak* nevezzük, hogy hangsúlyozzuk a tényt, hogy a nők nem kötelesek azonnal elfogadni a pillanatnyilag legjobb ajánlatot. A jobb érthetőség céljából tekintsük a következő példát (Roth and Oliveira Sotomayor, 1990, 29. oldal):

1. Példa (Példa a késleltetett elfogadási algoritmusra.).

Az alábbi (M, W, P) társkereső piacot vizsgáljuk:

$$\begin{aligned}
P(m_1) &= w_1, w_2, w_3, w_4 \\
P(m_2) &= w_4, w_2, w_3, w_1 \\
P(m_3) &= w_4, w_3, w_1, w_2 \\
P(m_4) &= w_1, w_4, w_3, w_2 \\
P(m_5) &= w_1, w_2, w_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(w_1) &= m_2, m_3, m_1, m_4, m_5 \\
P(w_2) &= m_3, m_1, m_2, m_4, m_5 \\
P(w_3) &= m_5, m_4, m_1, m_2, m_3 \\
P(w_4) &= m_1, m_4, m_5, m_2, m_3
\end{aligned}$$

- Minden férfi számára van elfogadható nő.
- m_1, m_4, m_5 megkéri w_1, m_2 és m_3 pedig w_4 kezét.
- w_1 a kérői közül m_1-t, w_4 pedig m_2-t jegyzi el, m_4, m_5 és m_3 elutasításra kerül. A dolgok jelenlegi állása szerint a párosítás a következőképpen alakul:

$$\begin{array}{cccc}
w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\
m_1 & & & m_2
\end{array}$$

- A kikosarazott férfiak újra választanak. m_3, m_4, és m_5 rendre w_3, w_4 és w_2 kezét kéri meg.
- Mivel $m_4 >_{w_4} m_2$ ezért w_4 elutasítja korábbi jegyesét és helyette m_4-t jegyzi el. Most a párosítás így néz ki:

$$\begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_1 & m_5 & m_3 & m_4 \end{array}$$

- A kikosarazott m_2 most w_2 kezét kéri meg és ezzel kiüti helyéről m_5-öt. Így

$$\begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \end{array}$$

- Most m_5 a harmadikként preferált w_4-nél próbálkozik, aki kikosarazza. Mivel minden számára elfogadható nő kikosarazta, nőtlen marad, s ezzel kialakul a végleges párosítás:

$$\mu_M = \begin{array}{ccccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & (m_5) \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 \end{array}$$

A fenti párosítást μ_M-mel jelöljük hangsúlyozva, hogy itt a férfiak voltak a kezdeményezők (leányvásár). Legényvásár esetén más párosítást kapunk, ami természetesen szintén stabil:

$$\mu_W = \begin{array}{ccccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & (m_5) \\ m_2 & m_3 & m_4 & m_1 & m_5 \end{array}$$

Nem nyilvánvaló és talán némileg meglepő, hogy minden férfi az első, minden nő az utóbbi párosítást preferálja.

2.5. Definíció. *Egy adott (M, W, P) házassági piacra a μ stabil párosítás M-optimális, ha minden férfi számára legalább olyan kedvező, mint bármely másik μ' stabil párosítás, azaz $\mu \geq_M \mu'$. Hasonló módon ν W-optimális, ha minden nő számára legalább olyan kedvező, mint bármely másik ν' stabil párosítás, azaz $\nu \geq_W \nu'$.*

Ez azt jelenti, hogy μ *minden egyes* férfi számára jobb (vagy nem rosszabb), mint bármely más *stabil* párosítás. Bár μ, illetve ν nem a legjobb párosítás minden egyes férfi, illetve nő számára, mondhatjuk azt, hogy az elérhető legjobb.

Tekintve, hogy a párosítások során a férfiak, illetve a nők egymással versenyeznek a másik nem képviselőiért, azt gondolhatnánk, hogy olyan párosítás, ahol érdekeik mégis találkoznak, nem, vagy igen ritkán létezhet. Igen meglepő tehát hogy ilyen párosítás pedig igenis létezik!

2.6. Tétel. *(Gale and Shapley, 1962) Minden (M, W, P) társkereső piacra létezik M-optimális és W-optimális párosítás is és ezek pontosan a késleltetett elfogadási algoritmus által leányvásár, illetve legényvásár esetén meghatározott μ_M, illetve μ_W stabil párosítások.*

Knuth (1976) azt is igazolta, hogy μ_M a nők számára, μ_W pedig a férfiak számára a lehető legrosszabb stabil párosítás. Általánosan igaz, hogy ami a férfiaknak jobb, az a nőknek rosszabb és fordítva.

2.3. Őszinteség és stratégiai kérdések

Az eddigiekben feltételeztük, hogy a társkereső piac résztvevői mindig pontosan a preferenciáik szerint cselekszenek. Például, tegyük fel, hogy a késleltetett elfogadási algoritmusban a férfiak bármely nőnek megkérhetik a kezét, a nők pedig bármelyik kérő ajánlatát elfogadhatják. Vajon ekkor mindig a preferenciáik szerint fognak cselekedni? Hasonlóan: ha a döntést egy házasságközvetítőre bízzuk, vajon a résztvevők valódi preferenciáikat fogják megadni?

Ha bármelyik kérdésre „nem” a válasz, akkor adódhatnak olyan helyzetek, amikor valamely résztvevő kedvezőbb házastárssal kerül párosításra, amennyiben a házasságközvetítőt félrevezeti preferenciáit illetőleg. Ezt *stratégiai viselkedésnek*, vagy egyszerűen *taktikázásnak* nevezzük. A kérdésre nagyon könnyen megadhatjuk a választ, ehhez elegendő a következő példát megvizsgálni:

2. Példa. *Ahol az őszintétlenség jövedelmező*

Vegyük ismét az 1. példát. Mint emlékezetes, az alábbi M-optimális párosítást kaptuk:

$$\mu_M = \begin{array}{ccccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & (m_5) \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 \end{array}$$

azaz w_1 m_1-gyel lett összepárosítva, aki az ő harmadik választása.

Most vizsgáljunk egy módosított (M, W, P') piacot, ahol w_1 taktikai megfontolásból a $P'(w_1) = m_2, m_3, m_4, m_5, m_1$ preferenciát jelenti be, míg a többiek preferenciája változatlan. Emlékeztetőül eredetileg $P(w_1) = m_2, m_3, m_1, m_4, m_5$. Ekkor az alábbi párosítást kapjuk:

$$\mu'_M = \begin{array}{ccccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & (m_5) \\ m_3 & m_1 & m_2 & m_4 & m_5 \end{array}$$

Láthatjuk, hogy itt w_1 párja m_3, ahol $m_3 >_{w_1} m_1$, tehát az őszintétlenség lehet kifizetődő.

Ez mindenképpen rossz hír, de szeretnénk tudni, hogy mennyire. Mik az őszintétlenség okai? Kik fognak taktikázni? Léteznek olyan piacok, ahol az őszinteség mindig kifizetődő? Végül felmerül az a kérdés is, hogy mindez hogy egyeztethető össze a stabil párosítások elméletével. Ott ugyanis a résztvevők által megadott preferenciák szerint alakul ki egy stabil párosítás: ha ezeket rendszeresen valótlanul adják meg, semmit nem tudunk a stabilitásról az *eredeti*, *valós* preferenciák tükrében.

A kérdést egy általános stratégiai modell keretei között tudjuk megvizsgálni.

2.3.1. Stratégiai modell

Ismét egy (M, W, P) társkereső piacot vizsgálunk. Feltételezzük, hogy van egy házasságközvetítő, aki valamilyen algoritmus és a jelentkezők *megadott* preferenciái alapján készít egy párosítást. Feladjuk tehát az idealista elképzelést, hogy mindenki a valós preferenciáit fogja megadni, bár éppen arra törekszünk majd, hogy rábírjuk az érintetteket az őszinteségre. A megadott preferenciák profilját Q-val jelöljük és a közvetítő ezen preferenciák függvényében készíti el a $\mu = h(Q)$ párosítást.

Egy pillanatra úgy tűnhet, hogy kihagytunk egy lépést. Miért bízzuk hirtelen a közvetítőre a párosítást? A két módszer között lényegi különbség nincs, hiszen most a piac résztvevői nem árulnak el többet, mint hogy az egyes helyzetekben hogyan cselekednének, míg e lépések célja rejtve marad a közvetítő előtt.

Ez a megközelítés megfelel egy nonkooperatív játékelméleti modellnek. A házasulandók a játékosok, stratégiáik a lehetséges preferencia-profilok, melyekből a közvetítő létrehoz egy párosítást. Végül a hasznosságot a valós preferenciák alapján állapíthatjuk meg.

A legjobb válasz. A továbbiakban i-vel jelöljük a házassági piac valamely résztvevőjét. Mivel a Q tulajdonképpen a résztvevők stratégiai döntéseit összegzi, ezért az egyszerűség kedvéért a résztvevők stratégia profiljának nevezzük; i stratégiáját Q_i-vel, a többi játékos stratégia profilját pedig Q_{-i}-vel jelöljük, azaz $Q = (Q_i, Q_{-i})$. Ekkor $Q' = (Q'_i, Q_{-1})$ a Q profiltól csak i megadott preferenciáiban tér el, míg a többiek megadott preferenciái változatlanok.

Ekkor a többiek adott Q_{-i} stratégiájára adott Q_i^* stratégiát *legjobb válasznak* nevezzük, ha bármilyen Q_i-t választva

$$h(Q_i^*, Q_{-i}) \geq_i h(Q_i, Q_{-i}).$$

A legjobb válasz nem feltétlenül egyértelmű, azaz lehet több legjobb válasz is, ezek természetesen ugyanazt a párt eredményezik i-nek.

Ha valamely Q_i^* *minden* Q_{-i}-re legjobb válasz, akkor *domináns stratégiának* nevezzük.

Lehetetlenségi tétel. Most rátérünk a közvetítő által használt algoritmus vizsgálatára. Tulajdonképpen csak az algoritmus bemenete és eredménye érdekes, részletei érdektelenek. Így szerencsésebb az algoritmus helyett a *párosító mechanizmus* elnevezés, formailag egy h függvényről van szó, ami egy tetszőleges (M, W, P) piachoz egy $h(Q)$ párosítást rendel.

Egy μ párosítás *Pareto-optimális*, ha bármely más $\mu' \neq \mu$ párosításhoz létezik olyan i egyed, hogy $\mu' <_i \mu$. Egy párosító mechanizmus *Pareto-optimális*, ha minden piachoz Pareto-optimális párosítást rendel.

Egy párosító mechanizmus stratégia-biztos (vagy taktika-mentes), ha a mechanizmus jelenlétében az egyedek valós preferenciáikat adják meg, azaz ha a mechanizmus eredményét, a párosítást nem befolyásolja az a tény, hogy megengedjük a taktikázást. Mivel ekkor a résztvevők felfedik valós preferenciáikat, az ilyen mechanizmusokat revelációs mechanizmusoknak is nevezzük.

A kérdés az, hogy a most bevezetett tulajdonságok mennyiben összeegyeztethetők egymással, illetve a stabilitással. Roth (1982) ezen kapcsolatokat vizsgálta és bár vannak jó hírek is, fő konklúziója negatív.

- Nincs olyan párosító mechanizmus, mely stratégia-biztos és stabil párosítást eredményez.
- Léteznek ugyanakkor olyan mechanizmusok, melyek stabil párosítást eredményeznek és a férfiak, vagy a nők felfedik valós preferenciáikat.
- Léteznek továbbá stratégia-biztos, Pareto-optimális mechanizmusok.

3. Példa (Stratégia-biztos Pareto-optimális mechanizmus).

Állítsuk sorba a férfiakat: $m_1, m_2, \ldots$. Vizsgáljuk a következő mechanizmust: m_1 a számára legkedvesebb hölgyet választja. m_2 a maradékból választhat, ... és így tovább. Világos, hogy a férfiaknak érdekében áll preferenciájuk felfedése. Ugyanakkor a nők preferenciája nem befolyásolja a végeredményt, tehát fel nem fedése sem, azaz a nőknek sem áll érdekükben stratégiai megfontolásokhoz nyúlni. A Pareto-optimalitás pedig garantált, hiszen minden férfi a számára legkedvesebb nőt választotta: bármely más párosítással valamelyikük rosszabbul jár.

Az amerikai NFL profi futballiga ilyen mechanizmus szerint veszi fel a végző egyetemista játékosokat. Itt a csapatok sorrendjét az előző szezonban elért eredményük határozza meg, lényegében fordított erősorrendben választanak. Hasonló módon az Egyesült Államok Tengerészeti Akadémiájának végzős kadétjai tanulmányi eredményeik szerinti rangsorban választhatnak a betöltendő pozíciók közül.[2]

A *véletlen* sorozatos diktatúra ennek módosított változata (Abdulkadiroğlu and Sönmez, 1998, 1999), ahol a hallgatók véletlen sorrend szerint választhatják az általuk legjobbnak ítélt, még elérhető iskolát.

Sajnos a következő tétel, melyet bizonyítás nélkül közlünk igazolja, hogy az őszinteség és a stabilitás – általában – nem összeegyeztethetők.

2.7. Tétel (Lehetetlenségi tétel). *(Roth, 1982) Nincs olyan stabil párosító mechanizmus, melyben a valós preferenciák felfedése domináns stratégia.*

A tétel azt jelenti, hogy nincs olyan mechanizmus, melyre *bármely* valós preferencia profil esetén teljesül a két tulajdonság. A tételt (Alcalde and Barbera, 1994) tovább erősítette:

[2] Roth and Oliveira Sotomayor (1990) idézi a New York Times 1986. január 30.-i számát.

2.8. Tétel. *(Alcalde and Barbera, 1994) Nincs olyan Pareto-optimális és egyénileg racionális párosító mechanizmus, melyben a valós preferenciák felfedése domináns stratégia.*

Mivel sok olyan alkalmazás létezik, ahol csak az egyik oldal stratégiai, érdekes azokat az eseteket is vizsgálni, ahol csak az egyik oldal stratégiai viselkedése kérdéses. A következő tételt is bizonyítás nélkül közöljük.

2.9. Tétel. *(Dubins and Freedman, 1981) Az M-optimális stabil párosítást eredményező mechanizmusban a férfiak számára domináns stratégia a valódi preferenciáik felfedése.*

A tétel nem mond semmit a nők viselkedéséről az M-optimális stabil párosítással kapcsolatban. Mivel az ő érdekeik ebben az esetben épp ellenkezőek, joggal feltételezzük, hogy az M-optimális stabil párosítás alkalmazása és több stabil párosítás esetén lesz olyan nő, aki jól jár azzal, ha valótlanul adja meg preferenciáit (Gale and Sotomayor, 1985).

A tárgyalást végül egy meglehetősen általános tétellel zárjuk, mely kimondja, hogy bár egyes csoportok manipulálhatják preferenciáikat, ez sosem lesz a csoport minden tagja számára domináns stratégia.

2.10. Tétel (A sikeres manipuláció korlátairól). *(Demange et al, 1987) Ha P jelöli a valódi preferenciákat és $\bar{P}$-ben csak a résztvevők valamely C részhalmazának preferenciái térnek el, akkor nincs olyan $\bar{P}$ szerint stabil párosítás, amit a C koalíció minden tagja preferál minden P szerint stabil párosítással szemben.*

Ezek, és még sok más kevésbé izgalmas tétel jelzik, hogy a stratégiai viselkedésnek szerepe van, de nem akkora. Felmerül a kérdés, hogy ha minden résztvevő él a preferenciák stratégiai manipulálásával, akkor mindez hova vezet, kialakul-e egy egyensúly, amiből aztán meghatározhatjuk az egyensúlyi párosítást. Az ilyen típusú egyensúly meghatározásához visszatérünk a probléma normális alakjához és a legjobb válasz fogalmához (2.3.1 szakasz).

2.11. Definíció. *A Q stratégiai preferencia-profil* egyensúlyt *alkot, ha minden Q_i legjobb válasz a többiek adott Q_{-i} stratégiáira.*

Ezt az egyensúlyt a játékelméletben Nash egyensúlynak (Nash, 1950, 1951) is nevezzük. A fogalmat felhasználva Roth (1982) tételét úgy is megfogalmazhatjuk, hogy nincs olyan stabil párosítási mechanizmus, melyre mindig egyensúlyi a preferenciák felfedése. Egyensúlyi profil esetén senki nem jár jól egy egyoldalú módosítással így az egyensúly önmegerősítő. A $\mu(i)$ megnevezése, mint egyetlen elfogadható pár minden egyes i résztvevő számára egy triviális Nash-egyensúlyt alkot, tehát az egyensúlyi párosítás létezése garantált. Ez azonban nem zárja ki más, esetleg stabil egyensúlyi párosítások létezését.

A továbbiakban elköszönünk a házassági piacoktól és rátérünk a sok-az-egyhez párosítások vizsgálatára.

3. Sok-az-egyhez párosítások: Felvételi modellek

A bevezetőben tárgyalt rezidensi felvételi, vagy hasonlóan a magyar felsőoktatási felvételi rendszer szintén párosítási probléma. Itt a párosítandók az iskolák (tulajdonképpen a szakok) és a jelentkezők. A korábbiakhoz hasonlóan a jelentkezők rangsorolni tudják az iskolákat/kórházakat, míg az utóbbiak is rendelkeznek valamilyen rangsorral a hallgatókat illetőleg.

Vannak ugyanakkor fontos különbségek is. Míg a házassági modellben minden férfi és nő pontosan egy személlyel kerül párosításra, addig a felvételi során egy egy iskola több hallgatót is felvehet. A párosítás eredménye egy diák számára a felvételt jelenti valamely intézménybe, vagy a magával való párosítást, azaz semelyik elfogadható helyre nem vették fel. Egy intézmény a szabad helyek közül tetszőleges számút feltölthet; az üresen maradt helyekre az iskolát önmagával párosítjuk.

A modell alkalmazható más párosítási problémákra is, mint például álláskeresők és cégek közti közvetítésben, de az egyszerűség kedvéért a továbbiakban hallgatókról és iskolákról fogunk beszélni.

3.1. Matematikai modell

A párosítás résztvevői az iskolák $C = \{C_1, C_2, ..., C_n\}$ és a hallgatók $S = \{s_1, s_2, ..., s_m\}$; a hallgatók az iskolákat, az iskolák pedig a hallgatókat rangsorolják. Feltételezzük, hogy minden preferencia teljes és tranzitív. A korábbiakhoz hasonlóan itt is egyszerű felsorolással írjuk le a preferenciákat, és elhagyjuk az elfogadhatatlan párosításokat. Így például $P(C_1) = s_1, s_2$, illetve $P(s_2) = C_3, C_1, C_2$. Konkrét összehasonlításban $C_i >_s C_j$, ha az s hallgató preferálja a C_i iskolát a C_j-vel szemben. Az s_i hallgató elfogadható a C iskola számára ha $s_i \geq_C C$ (ahol megengedtük az egyenlőséget, azaz indifferenciát is).

Első lényegi különbségként feltételezzük, hogy egy C iskola q_C hallgatót vehet fel. q_C-t az iskola kvótájának nevezzük.

A következő definícióhoz, mely nem más, mint a fentiek matematikai megfogalmazása, szükségünk van egy új fogalomra. Egy adott X halmaz elemeinek *rendezetlen családja* alatt X elemeinek egy gyűjteményét értjük, ahol megengedjük az ismétlődést is.

3.1. Definíció (Párosítás). *A μ párosítás egy olyan függvény, mely a $C \cup S$ halmaz elemeihez a $C \cup S$ halmaz rendezetlen családjait rendeli, mégpedig úgy, hogy*

1. $|\mu(s)| = 1$, *és* $\mu(s) = s$, *vagy* $\mu(s) \in C$, *azaz minden hallgatót pontosan egy iskolához, vagy önmagához rendeli*

2. $|\mu(C)| = q_C$, *azaz minden iskolához egy olyan családot rendelünk, melynek kardinalitása pontosan az iskola kvótájával egyezik. Megkötés továbbá, hogy ha a családnak r eleme hallgató ($|\mu(C) \cap S| = r$), akkor a maradék $q_C - r$ helyet önmagával, C-vel tölti fel.*

3. *Akkor, és csak akkor $\mu(s) = C$, ha s a $\mu(C)$ családba tartozik, azaz a párosítás kölcsönös.*

A párosításokat a korábbiakhoz hasonlóan ábrázoljuk, tehát

$$m_1 = \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & (s_3) \\ s_1\ s_2\ C_1\ C_1 & s_4 & s_3 \end{array}$$

azt jelenti, hogy $q^{C_1} = 4$, ebből 2 helyet töltött fel hallgatókkal, C_2 csak egy hellyel rendelkezett, amit sikeresen fel is töltött, míg s_3 felvételije sikertelen volt.

3.2. Preferenciák

A házassági modellben a párosítások közti preferenciák kérdésén hamar átestünk: minden résztvevő a hozzárendelt párja alapján rangsorolta a párosításokat. Tehát ha $\mu_1(x) >_x \mu_2(x)$, akkor (és csak akkor) $\mu_1 >_x \mu_2$. Ez a gondolatmenet a hallgatókra tökéletesen illik itt is, azonban az iskolákat itt nem hallgatókkal, hanem hallgatók *csoportjaival* párosítjuk, így mindenek előtt azt kell tisztázni, hogy az iskolák hogyan rangsorolják ezeket a hallgatói csoportokat.

A C iskola csoportokra vonatkozó preferenciáit $P^{\#}(C)$-vel jelöljük. Elvben $P^{\#}(C)$ bármi lehet, ugyanakkor joggal feltételezhetjük, hogy a preferenciák *reszponzívak*: Ha a hallgatók egy adott halmazában valamely hallgatót, egy, az iskola által felállított hallgatói rangsorban előrébb szereplő hallgatóra cserélünk, a többit pedig változatlanul hagyjuk, akkor az iskola a kapott halmazt preferálja. Általánosan:

3.2. Definíció. *A hallgatók részhalmazain értelmezett $P^{\#}(C)$ reláció reszponzív (az egyéni hallgatókra definiált $P(C)$ preferenciákra), ha*

$$\mu(C) \cup \{s'\} \setminus \{s\} >_C \mu(C) \Leftrightarrow s' >_C s,$$

ahol, értelemszerűen az első preferencia-reláció $P^{\#}(C)$-re, az utóbbi $P(C)$-re vonatkozik.

A reszponzivitás nem minden helyzetben állja meg a helyét. Így, bár felvételi modellnek nevezhető a cégek és álláskeresők piaca, az egyes felvehető alkalmazottak esetlegesen komplementer képességei miatt ezekben a modellekben a preferenciák nem lesznek reszponzívak. Az ilyen piacok részletes tárgyalása meghaladja e dolgozat kereteit, további részletekért lásd Kelso and Crawford (1982).

Bár a reszponzivitás némileg korlátok közé szorítja a $P^{\#}(C)$ reláció lehetséges változatait, nem határozza meg például az iskola rangsorában első és negyedik, illetve második és harmadik helyen levő hallgatók által alkotott halmazok rangsorát. Fordítva viszont egyértelmű a kapcsolat: $P^{\#}(C)$ egyértelműen meghatározza a $P(C)$ preferencia-relációt (hiszen $P^{\#}(C)$-t definiáljuk az egy hallgatóból álló csoportokra is).

3.3. Stabilitás

Akár a házassági modellben, itt is feltételezzük, hogy a felvételhez a felek kölcsönös beleegyezése szükséges, így nem számíthatunk olyan párosításokra, ahol $\mu(s) = C$ és vagy a hallgató elfogadhatatlan az iskola, vagy az iskola a hallgató számára. Ellenkező esetben az érintett résztvevő blokkolhatja a párosítást. Az ilyen blokkoktól mentes párosításokat *egyénileg racionálisnak* nevezzük.

Hasonlóan, a C iskola és az s hallgató blokkolhatja az adott μ párosítást, ha $\mu(s) \neq C$ és mindkettő preferálja a másikat (az egyik) jelenlegi párjával szemben, azaz $C >_s \mu(s)$ és $s >_C \sigma$, ahol $\sigma \in \mu(C)$ és lehet hallgató, vagy maga C, azaz egy üres hely.

3.3. Definíció (Stabil párosítás). *Egy párosítás stabil, ha egyénileg racionális és semelyik hallgató-iskola páros nem blokkolja.*

Elvileg ez a fajta stabilitás a történetnek csak része, de hamarosan igazoljuk, hogy a több hallgatóból és esetleg több iskolából álló koalíciók blokkjaira is kiterjesztett stabilitás a fentivel egybeesik.

Azt mondjuk tehát, hogy egy μ párosítás *csoportosan instabil*, avagy egy *koalíció blokkolja*, ha létezik egy A koalíció, és egy μ' párosítás, hogy minden egyes $s \in A$ hallgatóra és minden egyes $C \in A$ iskolára

- $\mu'(s) \in A$, tehát az érintett hallgatók az érintett iskolák valamelyikével lesznek összepárosítva,
- $\mu'(s) >_s \mu(s)$, tehát az új párosítást preferálják,
- ha $\sigma \in \mu'(C)$, akkor $\sigma \in A \cup \mu(C)$, tehát C új hallgatókat csak A-ból meríthet
- $\mu'(C) >_C \mu(C)$, tehát az érintett iskolák is az új párosítást preferálják.

Összegezve: Minden, a változásban érintett hallgató és iskola az új párosítást preferálja.

3.4. Definíció. *Egy párosítás* csoportosan stabil*, ha nem blokkolja semmilyen koalíció.*

3.5. Tétel. *Egy párosítás pontosan akkor stabil, ha csoportosan stabil.*

Mivel egy hallgató-iskola páros is koalíció, ha egy párosítást egy ilyen pár blokkol (azaz ha nem stabil), akkor csoportosan is instabil. Azaz, ha csoportosan stabil, abból következik, hogy stabil.

A másik irányhoz a reszponzivitást használjuk. Ha ugyanis egy párosítást blokkol egy koalíció, akkor létezik olyan hallgató-iskola pár, akik ebben a blokkban mindketten jól járnak (ha nincs hallgató a blokkoló koalícióban, akkor egy még egyszerűbb esettel van dolgunk, amit az olvasóra bízunk), méghozzá az iskola egy rosszabb hallgatót cserél le[3]. Ekkor viszont ez a páros a koalíciótól függetlenül is blokkolná a kiindulási párosítást, tehát az nem stabil.

3.4. Kapcsolat a házassági modellel

A tétel jelentősége messze túlmutat a tényen, hogy továbbra is a jól ismert stabilitás-koncepciót használhatjuk, azaz, hogy elegendő a kis koalíciókat figyelemmel kísérnünk. A tételből következik, hogy elegendő a résztvevők egyénekre vonatkozó P preferenciáival foglalkozni! Tehát el is felejthetjük a csoportokra vonatkozó preferenciák körüli problémákat. Mindez azt sugallja, hogy a felvételi és a házassági modell között a kapcsolat sokkal szorosabb, mint gondoltuk, s ez azt a reményt ébresztheti bennünk, hogy az ott kapott eredmények könnyen általánosíthatók lesznek a felvételi modellre.

Hogy ezt megvizsgáljuk, a (C, S, P) felvételi piacot házassági piaccá alakítjuk.

Ehhez elsőként az egyes iskolák által kínált helyeket külön-külön résztvevőként fogjuk vizsgálni, azaz tulajdonképpen a C iskolát q^C darabra bontjuk: $c_1, c_2, ..., c_{q^C}$, melyek átveszik C preferenciáit. Ugyanígy, a hallgatók is egyformán vélekednek a $c_1, ..., c_{q^C}$ helyekről, tehát, az egyszerűség kedvéért a hallgatók által az iskolákról felállított rangsorban C helyére beillesztjük a $c_1, ..., c_{q^C}$ sorozatot. Tehát, ha $C >_s C'$, akkor s a C minden egyes pozícióját preferálja C' minden egyes pozíciójához képest. Az így kialakított piac egy-az-egyben megfelel a házassági piacnak.

[3] A blokkoló koalícióba beleférnek olyan hallgatók is, akikkel külön nem járna jól az iskola, ezért kell itt óvatosnak lenni.

3.6. Tétel. *A felvételi problémában pontosan akkor stabil egy párosítás, ha a megfelelő házassági piaci párosítás is stabil.*

Eme tételen keresztül sok korábbi eredmény, például a stabil párosítások létezésére vonatkozók átvezethetők a felvételi problémára. Sajnos ez igaz a negatív eredményekre is. Mivel a házassági modell a felvételi modell speciális esete (ahol minden iskola legfeljebb 1 hallgatót vehet fel) itt is igaz a 2.7 tétel, azaz nincs olyan stabil párosító mechanizmus, ahol az őszinteség domináns stratégia lenne.

Ugyanakkor több olyan tételt is megfogalmaztunk optimalitás vonatkozásában, ahol az eredmény egy kicsit más lesz, ha figyelembe vesszük azt is, hogy az egyes helyek valójában együtt alkotnak egy résztvevőt, aki mindig egy ilyen, ha úgy tetszik, koalíciót alkotva hozza meg döntéseit.

4. A NIMP/Gale-Shapley algoritmus és tulajdonságai

A továbbiakban bizonyítás nélkül soroljuk fel a főbb tételeket. Mindenek előtt a NIMP algoritmus sikerének nyitját próbáljuk felfedni:

4.1. Tétel. *(Roth, 1984) A NIMP algoritmus (lásd A. Appendix) stabil párosító mechanizmus.*

A fenti tétel megmagyarázza, hogy miért volt oly sikeres a központosított felvételi: A javasolt párosítás stabil, tehát nincs olyan medikus-kórház páros, akik javítani tudnának rajta. Így mindenki elégedett lehetett a kapott párosítással.

4.2. Tétel. *(Roth, 1984) A NIMP algoritmus bármely megadott preferencia-profil esetén a kórházak számára optimális stabil párosítást eredményezi. Azaz a NIMP algoritmus bármely megadott preferencia-profil esetén a H_i kórházat az elérhető legnagyobb számú, és ezen belül az elérhető általa legelőrébb rangsorolt hallgatóval párosítja.*

Ez a tétel egyszerre igazolja, hogy létezik kórházak számára optimális stabil párosítás, illetve, hogy a NIMP algoritmus pontosan ezt állítja elő. Mielőtt ebből túl messzire menő következtetéseket vonnánk le, tekintsük a következő tételt:

4.3. Tétel. *(Roth, 1985) A hallgató-optimális stabil párosítás gyengén Pareto-optimális, viszont a kórház-optimális stabil párosítás nem feltétlenül az.*

A tétel első fele a házassági modellekre kapott eredményekből következik, míg a második részre Roth (1985) mutat egy példát, ahol a Pareto-optimalitás sérül.

Végül pár eredmény a NIMP ellen megfogalmazott kritikákkal kapcsolatban.

Az első ilyen nem pusztán kritika, hanem világosan megfigyelhető tény, hogy ahogy nő a végzős medikusok között az orvos-orvos házaspárok száma, csökken a NIMP-ben való részvétel aránya. Világos, hogy a NIMP a házaspárokat nehezen kezeli, de vajon létezik-e jobb megoldás.

4.4. Tétel. *(Roth, 1984) Ha a házaspárokat is figyelembe vesszük a felvételi modellben, nem mindig létezik stabil párosítás.*

A NIMP-pel kapcsolatos másik kritika a vidéki kórházakból érkezett. A tapasztalat azt mutatta, hogy ezek a kórházak nehezebben töltötték fel állásaikat, és a felvettek közt sokan voltak a külföldi egyetemeken végzett medikusok. Felmerült a kérdés, hogy ez vajon hogy befolyásolja a vidék orvosi ellátásának színvonalát, illetve, hogy lehetséges volna-e a NIMP módosításával ezen a tendencián javítani. Ez elsőre jó ötletnek hangzik, hiszen a párosításban résztvevő medikusok jó része követi a mechanizmus ajánlását, tehát, ha a mechanizmust lehetne úgy módosítani, hogy több/jobb orvos kerüljön vidékre, ezzel megoldódna a probléma. Ugyanakkor a lehetőségeknek vannak bizonyos korlátai. A mechanizmusban való magas fokú önkéntes részvétel annak köszönhető, hogy az eredményezett párosítás stabil. Ez tehát nem lehet alku tárgya. Ekkor viszont a következő tételek azt mutatják, hogy a mechanizmus módosításával nem érhető el a kitűzött cél.

Az első tétel a betöltetlen állásokkal foglalkozik.

4.5. Tétel. *(Roth, 1984) Az felvett hallgatók és a betöltött férőhelyek minden stabil párosítás esetén ugyanazok.*

A másik igény a felvett medikusok minőségével kapcsolatos. Ha már nem lehet minden férőhelyet betölteni, legalább kapjanak ezek a kórházak jobb rezidenseket.

4.6. Tétel. *(Roth, 1986) Az a kórház valamely stabil párosítás esetén nem tudja minden üresedését feltölteni, ahhoz minden stabil párosítás pontosan ugyanezeket a medikusokat fogja hozzárendelni.*

Végül a stratégiai kérdésekre térünk rá.

4.7. Tétel. *(Roth, 1985) Nincs olyan stabil párosítás melyben minden kórház számára domináns stratégia a valós preferenciáik felfedése.*

Ez azonban úgy tűnik amiatt van, hogy az iskolák/kórházak a házassági modellben inkább koalícióként viselkednek. A hallgatók leképezése sokkal természetesebb, így nem meglepő, hogy rájuk alkalmazható a 2.9 tétel:

4.8. Tétel. *(Roth, 1986) A hallgató-optimális stabil párosítás esetén a hallgatók számára domináns stratégia preferenciáik felfedése.*

Az utóbbi eredménynek komoly szerepe volt abban, hogy a 90-es évek elején a NIMP áttért a hallgató optimális párosításra (leányvásár helyett legényvásár). Ha feltételezzük, hogy az iskolák, kórházak nem viselkednek stratégiai félként, azaz nem taktikáznak, ez az algoritmus akár őszinte preferencia-felfedést is eredményezhet.

4.9. Tétel. *(Roth, 1986) Vegyünk egy tetszőleges stabil mechanizmust. Ekkor bármely, a valós preferenciák szerint egyénileg racionális párosításhoz létezik egy egyensúly deklarált (tehát nem valós) preferencia-profil, ami ezt a párosítást eredményezi.*

5. További alkalmazások

5.1. Bevezető

Az eddigiekben, a bevezető, motiváló példától eltekintve, mely aztán végigkísérte az egész dolgozatot eddig elsősorban az elméleti kérdésekkel foglalkoztunk. A továbbiakban rátérünk a párosítások, elsősorban a felvételi modell alkalmazásainak tárgyalására.

5.2. Rezidensképzés az Egyesült Királyságban: Prioritás-alapú párosítás

Amikor 60-as évek közepén az Egyesült Királyságban (Roth and Oliveira Sotomayor, 1990) az amerikaihoz hasonló problémák jelentkeztek, megoldást itt is a (regionálisan) központosított párosítási mechanizmusokban látták, amiket aztán többé-kevésbé az amerikai minta alapján, a helyi, regionális sajátságokat figyelembe véve vezettek be. Ezen mechanizmusok nagy része nem eredményezett stabil párosításokat és így nem meglepő, hogy az (önkéntes) részvétel elmaradt a kívánatostól és így – érdeklődés hiányában – ezek a mechanizmusok fokozatosan eltűntek. Az is tanulságos, hogy mindösszesen kettő (Cardiffban és Edinburgh-ban) volt stabil mechanizmus; ezek igen sikeresek voltak és a mai napig használatban vannak.

Mi egy instabil mechanizmust vizsgálunk, melyeket Newcastle-ban és Birminghamben vezették be még a 60-as években. Itt a hallgatók és a leendő konzulensek rangsorolták egymást és a párok összesített rangja alapján alakult ki egy sorrend, majd eszerint a sorrend szerint kerültek a hallgatók elhelyezésre; különbség csak a döntetlenek elbírálásában volt.

A Newcastle-i tapasztalat szerint egyre fontosabb lett a hallgatók és konzulensük között a közvetlen kapcsolat, a rendszer feladása előtt a résztvevők döntő része csak a már megkötött egyezség rögzítésére használta, azaz csak az elsőrangú preferenciák jelzésére, ami természetesen hátrányos helyzetbe hozta azokat, akik a rendszert annak eredeti rendeltetése szerint használták.

Hasonló algoritmust használnak a német egyetemi felvételi rendszerben (Braun et al, 2007).

5.3. Sorozatos diktatúra

Abdulkadiroğlu and Sönmez (2003) rávilágított: sok egyesült-államokbeli iskolában tisztázatlan a felvételi rendje, a döntések gyakran önkényesek és legritkább esetben felelnek meg a tudományban már évtizedek óta ismert alapvető elvárásoknak. Itt ezek közül az eredmények közül tekintünk át párat.

A már a korábban említett *(véletlen) sorozatos diktatúra* alkalmazásakor a hallgatókat (véletlen) sorba rendezik és a soron következő hallgató mintegy diktátorként választhat a megmaradt opciók közül. Akár a Tengerészeti Akadémián alkalmazott eljárásban, általánosan igaz, hogy domináns stratégia a preferenciák felfedése. Amellett, hogy ez nem egy stabil párosító mechanizmus, a beiskolázási algoritmusoknál egy másik probléma is felmerül, nevezetesen, hogy a különböző iskolák más-más prioritási sorrendbe rendezik a hallgatókat (például minden iskola a helyi hallgatókat veszi előre). Tehát a beiskolázási mechanizmusnak figyelembe és tudomásul kell vennie az iskolák ilyetén preferenciáit. Balinski and Sönmez (1999); Abdulkadiroğlu and Sönmez (2003) rávilágítanak, hogy a Gale-Shapley algoritmus nemcsak, hogy ezen igényeknek felel meg, de még olyan további szempontok figyelembevételére is alkalmas, mint az úgynevezett szabályozott választás, ahol bizonyos korlátokat alkalmaznak nemi, faji, vagy etnikai alapon a szegregáció csökkentésére.

Szingapúrban a tanulmányi eredmények alapján rangsorolják a hallgatókat (Teo et al, 2001) és –lényegében– az így kialakult sorrendben választhatnak iskolát. A problémát bonyolítja, hogy a felvételi lapok beküldése pillanatában még nem ismert a hallgatók tanulmányi eredménye, illetve a hallgatók csak hat iskolát nevezhetnek meg, s ha ezek egyikébe sem nyernek felvételt, akkor a megmaradt helyek valamelyikére, önkényesen, elsősorban fizikai közelség alapján kerülnek elhelyezésre.

5.4. A bostoni mechanizmus

Ezt az azóta sokat kritizált mechanizmust Bostonban (1999 és 2005 között) és még vagy féltucat más városban (Ergin and Sönmez, 2006; Abdulkadiroğlu et al, 2005a) használták. Az algoritmus a következő (Abdulkadiroğlu and Sönmez, 2003):

1. A jelentkezők és az iskolák kialakítják a preferenciáikat. Utóbbiak preferálják a diákok testvéreit, ezután gyalogtávolságon belül lakókat és mindenek előtt azokat, akikre mindkettő igaz. Ezen belül a sorrend véletlenszerű.

2. Első körben csak az első helyen megjelölt iskolát veszik figyelembe. Minden iskola a hozzá jelentkezők között a fent meghatározott preferenciák alapján, illetve a kapacitás függvényében osztja ki a helyeket.

3. A maradék hallgatókat a második helyen megjelölt iskolába próbáljuk meg elhelyezni

4. És így tovább, egészen, amíg el nem fogynak a hallgatók.

A mechanizmus Pareto-optimális a *megadott* preferenciák alapján. Legnagyobb problémája, hogy a jelentkezőknek taktikázniuk kell. Nagyon kockázatos dolog ugyanis olyan iskolát első helyen megjelölni, ahova nagy a túljelentkezés, hiszen ha ide nem sikerül bejutni, könnyen lehet, hogy a második, harmadik, stb. helyen megjelölt iskolák is betelnek (Glazerman and Meyer, 1994). Ennek megfelelően a jelentkezők jelentős része taktikázni kénytelen (Chen and Sonmez, 2006).

5.1. Tétel. *(Ergin and Sönmez, 2006) A bostoni mechanizmusban az iskolák számára domináns stratégia a hallgatókat valós preferenciáik szerint rangsorolni. Minden más domináns stratégia pedig ezzel azonos párosítást eredményez.*

Tehát az iskoláknak akkor sem érdeke valótlan preferenciák megadása, ha erre a törvényi keretek lehetőséget biztosítanak. Ennek tükrében általánosan igaz a bostoni mechanizmusra az alábbi tétel:

5.2. Tétel. *(Ergin and Sönmez, 2006) Ha P a valódi preferenciákat jelöli, vizsgáljuk meg a stratégiai preferencia-választó játékot. A játék egyensúlyához tartozó párosítások halmaza pontosan egyezik a P preferenciákhoz tartozó stabil párosításokkal.*

Fontos hangsúlyozni, hogy stabil párosításokat csak akkor kaphatunk, ha a jelentkezők megfelelően jelölik meg preferenciáikat.

Mivel a tétel általában stabil párosításokról szól, a 4.3 tétel alapján ennél gyengén jobb a jelentkezők számára a hallgató-optimális késleltetett elfogadási algoritmus. Ennek tükrében nem meglepő, hogy Boston 2005-ben a mechanizmus megváltoztatása mellett döntött (Abdulkadiroğlu et al, 2005b, 2006).

5.5. A columbusi algoritmus

A columbusi algoritmus sokban hasonlít a központosítás előtti rezidens felvételi rendszerhez, azzal a lényegi eltéréssel, hogy mivel az elfogadás után a jelentkező kikerül a rendszerből, nem kap utólag kedvezőbb ajánlatot, ami esetleg destabilizálhatná a rendszert, illetve nem merül fel a jogos irigység problémája sem.

A Columbus Cityben alkalmazott algoritmus a következő (Abdulkadiroğlu and Sönmez, 2003, alapján):

1. Minden jelentkező legfeljebb 3 iskolát jelölhet meg.
2. Bizonyos iskoláknál garantált helye van az iskola körzetében lakóknak. Egyébként a jelentkezők rangsora véletlen.
3. A (még) szabad helyeket a fenti preferenciák figyelembevételével ajánlják meg a jelentkezőknek. Az ajánlatra 3 napon belül kell válaszolni. Elfogadás esetén a jelentkező kikerül a rendszerből, az elfogadott ajánlat alapján kerül beiskolázásra. Ahogy egyes ajánlatok elutasításra kerülnek, ezeket a helyeket megajánlják az egyenlőre várólistás jelentkezőknek.

Sajnos azonban a stratégiai megfontolások itt is komoly szerepet kapnak: Egyáltalán nem világos, hogy mi alapján célszerű iskolát választani, illetve, az iskoláktól kapott ajánlatot elfogadni. Az például világos, hogy a túljelentkezéssel terhelt legjobb iskolákba való jelentkezés ronthatja a jó iskolákba való bejutás esélyeit, hiszen előfordulhat, hogy a jelentkező egyik megjelölt iskolába sem nyer felvételt és így a maradék helyek valamelyikére kerül besorolásra.

5.6. A legjobb csere-körök módszere

Az Abdulkadiroğlu and Sönmez (2003) által javasolt algoritmus lényege, hogy az iskolák által legjobbnak tartott hallgatók egymás között elcserélhetik a megszerzett helyüket. Előnye, hogy a hallgatóknak érdeke a valós preferenciák felfedése, tehát az algoritmus orvosolja az előbbi algoritmusoknál felmerülő problémák nagy részét.

1. Minden hallgató és iskola megnevezi mit/kit rangsorol az első helyre. Mivel a résztvevők száma véges létezik olyan $s_1, C_1, s_2, ..., C_k$ kör, hogy s_i $C_i t$-t preferálja, aki viszont s_{i+1}-t, továbbá C_k s_1-t preferálja. Minden hallgató és minden iskola legfeljebb egy-egy körhöz tartozik. Minden olyan hallgatót, aki egy ilyen körhöz tartozik, felveszi az általa megnevezett iskola. Ezzel a hallgató kikerül a rendszerből, az iskolának pedig eggyel kevesebb szabad helye marad. Ha minden hely elfogyott, akkor az iskola is kikerül a rendszerből, így a továbbiakban a hallgatók már nem nevezhetik meg, mint kedvencüket.

2. Minden további lépésben a maradék hallgatók és a maradék iskolák vesznek részt, ettől eltekintve a lépés lefolyása ugyanaz, tehát a résztvevők megnevezik a preferenciájukat, majd a körökhöz tartozó hallgatókat az általuk megnevezett iskola veszi fel.
3. Az algoritmus akkor ér véget, ha a hallgatók elfogynak. Mivel minden lépésben legalább egy hallgató felvételt nyer, a szükséges lépések száma nem több, mint a hallgatók száma.

5.3. Tétel. *(Abdulkadiroğlu and Sönmez, 2003) A legjobb csere-körök mechanizmus Pareto-optimális és stratégia-biztos.*

A mechanizmus nem eredményez stabil párosításokat, de lehetnek olyan helyzetek, amikor más szempontok fontosabbak. Így például Abdulkadiroğlu and Sönmez (2003) rámutat, hogy ha Columbus Cityben olyan fontos a helybéliek prioritása, hogy garantált helyük van az iskolákban, a fenti mechanizmus közelebb áll a törvényhozó szándékához.

6. Összegzés

Az iskolai felvételi rendszereknek se szeri-se száma, ezek jó része azonban részben, vagy teljesen önkényes, informális döntésen alapszik. Szerencsésebb esetben rögzítésre kerülnek bizonyos szabályok, de ezek lehetnek éppoly önkényesek. A párosítások irodalma lehetőséget kínál a mechanizmusok absztrakt, matematikai formában való megfogalmazására, majd ezek tulajdonságainak elemzésére. Bevezettük a matematikai modellt, a párosítások egyes tulajdonságait és igazoltuk ezek jelentőségét. Megmutattuk hogy a stabilitás és a stratégia-biztosság egyszerre nem teljesülhetnek így nincs is egyértelműen legjobb párosítási mechanizmus.

Megvizsgáltunk tehát néhány mechanizmust, melyek világos szabályrendszerüknek köszönhetően könnyen modellezhetők matematikailag. Az átláthatóság hátránya, hogy a hibák könnyebben észrevehetők, bár a legtöbb esetben a felvételi rendszerek használói mindenféle matematikai modell nélkül mondtak ítéletet. A NIMP késleltetett elfogadási algoritmusának bevezetése után az (önkéntes) részvétel igen magas volt és a résztvevők elfogadták a rendszer ajánlásait. Ezzel szemben az Egyesült Királyságban bevezetett, csak felületes hasonlóságot mutató mechanizmusok kudarcot vallottak, a részvétel csak formális volt. Ugyanígy, a beiskolázási algoritmusok is meglehetősen nagy változatosságot mutatnak: itt a legtöbb kritika nem a stabilitással, hanem a stratégiai kérdésekkel kapcsolatos. Mivel a valódi preferenciák felfedése nem domináns stratégia (sőt: ez csak a legritkább esetben előnyös), a jelentkezőknek nem kis fejtörést és frusztrációt okoz a megfelelő jelentkezési taktikák kiválasztása (Ergin and Sönmez, 2006). Bár sok felvételi program dicsekszik azzal, hogy rendkívül magas arányban kerülnek hallgatók az első helyen megjelölt iskoláikba (Glenn, 1991; Glazerman and Meyer, 1994). Ez nagyon jól hangzik, de sajnos ezek az értékelések azt nem vizsgálják, hogy mindez hogy viszonyul a valódi preferenciáikhoz.

Összefoglalónkban a felvételi rendszerek modellezésére használt kétoldalú párosításokat vizsgáltuk. Bíró (2006) ad – magyar nyelven – egy szélesebb körű áttekintést.

Hivatkozások

ABDULKADIROĞLU, A.– PATHAK, P. A.– ROTH, A. E. [2005a]: The New York City high school match. American Economic Review, 95, 364–367.

ABDULKADIROĞLU, A.– PATHAK, P. A.– ROTH, A. E.– SÖNMEZ, T. [2006]: Changing the Boston school choice mechanism. Boston College Working Papers in Economics 639, Boston College Department of Economics.

ABDULKADIROĞLU, A.– PATHAK, P. A.– ROTH, A. E.– SONMEZ, T. [2005b]: The Boston public school match. American Economic Review, 95, 368–371.

ABDULKADIROĞLU, A.– SÖNMEZ, T. [1998]: Random serial dictatorship and the core from random endowments in house allocation problems. Econometrica, 66, 689–702.

ABDULKADIROĞLU, A.– SÖNMEZ, T. [1999]: House allocation with existing tenants. Journal of Economic Theory, 88, 233–260.

ABDULKADIROĞLU, A.– SÖNMEZ, T. [2003]: School choice: A mechanism design approach. American Economic Review, 93, 729–747.

ALCALDE, J.– BARBERA, S. [1994]: Top dominance and the possibility of strategy-proof stable solutions to matching problems. Economic Theory, 4, 417–35.

BALINSKI, M.– SÖNMEZ, T. [1999]: A tale of two mechanisms: Student placement. Journal of Economic Theory, 84, 73–94.

BÍRÓ PÉTER [2006]: Stabil párosítási modellek és ezeken alapuló központi párosító programok. Szigma, 37, 153–175.

BRAUN, S.– DWENGER, N.– KÜBLER, D. [2007]: Telling the truth may not pay off: An empirical study of centralised university admissions in germany. IZA Discussion Papers 3261, Institute for the Study of Labor (IZA).

CHEN, Y.– SONMEZ, T. [2006]: School choice: An experimental study. Journal of Economic Theory, 127, 202–231.

DEMANGE, G.– GALE, D.– SOTOMAYOR, M. [1987]: A further note on the stable matching problem. Discrete Applied Mathematics, 16, 217–222.

DUBINS, L. E.– FREEDMAN, D. A. [1981]: Machiavelli and the Gale-Shapley algorithm. American Mathematical Monthly, 88, 485–494.

ERGIN, H.– SÖNMEZ, T. [2006]: Games of school choice under the boston mechanism. Journal of Public Economics, 90, 215–237.

GALE, D.– SHAPLEY, L. [1962]: College admissions and the stability of marriage. American Mathematical Monthly, 69, 9–15.

GALE, D.– SOTOMAYOR, M. [1985]: Some remarks on the stable matching problem. Discrete Applied Mathematics, 1, 223–232.

GLAZERMAN, S.– MEYER, R. H. [1994]: Public school choice in Minneapolis. In: DOWNES, T. A.– TESTA, W. A. (eds.), Midwest approaches to school reform, 110–126. Federal Reserve Bank of Chicago.

GLENN, C. [1991]: Controlled choice in massachusetts public schools. Public Interest, 103, 88–105.

KELSO, S., ALEXANDER S.– CRAWFORD, V. P. [1982]: Job matching, coalition formation, and gross substitutes. Econometrica, 50, 1483–1504.

KNUTH, D. E. [1976]: Marriages Stables. Les Presses de l'Université de Montreal, Montréal.

KUHN, H. W. (ed.) [1997]: Classics in Game Theory. Frontiers of Economic Research. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

NASH, J. F. [1950]: Equilibrium points in n-person games. Proceedings of the National Academy of Sciences, 36, 48–49. Reprinted in (Kuhn, 1997, pp. 3-4.).

NASH, J. F. [1951]: Non-cooperative games. Annals of Mathematics, 54, 286–295. Reprinted in (Kuhn, 1997, pp. 14-26.).

ROTH, A. E. [1982]: The economics of matching: Stability and incentives. Mathematics of Operations Research, 7, 617–628.

ROTH, A. E. [1984]: The evolution of the labor market for medical interns and residents: A case study in game theory. Journal of Political Economy, 92, 991–1016.

ROTH, A. E. [1985]: The college admissions problem is not equivalent to the marriage problem. Journal of Economic Theory, 36, 277–288.

ROTH, A. E. [1986]: On the allocation of residents to rural hospitals: A general property of two-sided matching markets. Econometrica, 54, 425–27.

ROTH, A. E.– OLIVEIRA SOTOMAYOR, M. A. [1990]: Two-sided matching. A study in gametheroretic modeling and analysis. No. 18 in Econometric Society Monographs. Cambridge University Press, Cambridge.

TEO, C.-P.– SETHURAMAN, J.– TAN, W.-P. [2001]: Gale-Shapley stable marriage problem revisited: Strategic issues and applications. Management Science, 47, 1252–1267.

A. A NIMP algoritmus

Az alábbiakban Roth (1984) alapján bemutatjuk a NIMP algoritmust.

Minden kórház rangsorolja a jelentkezőket (X-szel megjelölve a nem elfogadhatókat), és minden hallgató rangsorolja a kórházakat, melyekhez jelentkezett (hasonlóan megjelölve az érdekteleneket). Az így elkészített lapokat kell a központba eljuttatni, ahol első körben a kórházi rangsorokat megtisztítják a kórházat elfogadhatatlanként megjelölő hallgatóktól és ugyanígy a hallgatók rangsorát az őket elfogadhatatlanként megjelölő kórházakétól. A szerkesztett listák tehát elfogadható alternatívákat rangsorolnak.

Ezeket a listákat egy feldolgozó algoritmusba táplálják, mely egyrészt egy párosító fázisból, majd egy próbapárosítás-és-javítás fázisból áll. A párosító fázis első lépése (az 1/1. lépés) az vizsgálja, hogy akadnak-e olyan kórházak és hallgatók, melyek egymás rangsorában első helyen szerepelnek. (Ha egy H_i kórház kvótája q_i, akkor mindez a q_i első helyen rangsorolt hallgatóra vonatkozik.). Ha nincs ilyen találat, akkor az algoritmus rátér a 2/1. lépésre. Itt a hallgatók listáján második helyen szereplő kórházakat viszonyítjuk a kórházak listáján első helyen szereplő nevekkel. Ha nincsenek találatok, az algoritmus továbblép. Általában a k/1. lépésben a párosító fázis során olyan hallgató-kórház párokat keresnek, hogy a kórház a hallgatót az első helyre sorolja, a kórház pedig k-adik helyen szerepel a hallgatók rangsorában. Ha valamely k-ra van találat, akkor rátér a második fázisra.

Itt a talált párt ideiglenesen összepárosítják, azaz a hallgatót, akit az általa k-adik helyen megjelölt körház első helyen rangsorol, ehhez a kórházhoz rendeljük. Ekkor a hallgatók és á kórházak rangsorait a következő módón módosítjuk: Minden kórház, melyet az s_j hallgató hátrébb rangsorol, mint jelenlegi, ideiglenes párját, törlésre kerül (ha tehát most a k-adik preferenciájához került, akkor csak az első k tagot tartjuk meg. Egyúttal s_j-t töröljük minden, s_j listájáról törölt kórház listájáról (tehát ezen a listán már csak olyan hallgatók maradnak, akik még nem kerültek egy preferált kórházhoz. Vegyük észre, hogy ha egy kórház preferált hallgatóját töröljük a rangsorából, azzal a többi hallgató eggyel előrébb lép, hiszen így ugyanazon kvóta mellett kevesebb hallgatót tartalmaz a rangsor. Miután a rangsorokat frissítettük az algoritmus visszatér az első fázisba, ami a frissített rangsorok mellett keres párokat. Bármilyen új párosítás felülírja az aktuális, ideiglenes párosításokat (Megjegyzendő, hogy az új párosítás csak javíthat a hallgató meglevő hozzárendelésén, hiszen a hátrébb rangsorolt kórházakat töröltük.). Az algoritmus véget ér, ha nem talál új ideiglenes találatokat, ekkor az ideiglenes párokat véglegesíti. A pár nélkül maradt hallgatók, vagy kórházi helyek nem kerülnek párosításra és közvetlenül próbálhatnak más párosítatlanul maradt hallgatókkal, illetve helyekkel egyezkedni.